**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**
**ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ -

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) =$$

$$= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)),$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Άρα $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

**Α2.** α) Λ β) Σ γ) Σ

**Α3.** α) $(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$

β) $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

γ) $\overline{x} = \dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu}$

**ΘΕΜΑ Β**

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4,\ \kappa,\ 5,\ 6,\ 2\kappa+1,\ 4,\ 6,\ \kappa+2,\ 6,\ 4$$

με $\kappa = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

**Β1.** * Κάνω παραγοντοποίηση του $x^2 + x - 2$ με σχήμα Horner για $\rho = 1$ .

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | ρ = 1 |
| | 1 | 2 | |
| 1 | 2 | 0 | |

(x + 2) (x – 1)

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 1+2 = 3$

**Β2.** Για κ = 3, οι βαθμοί του φοιτητή γίνονται :

4 , ***3*** , 5 , 6 , ***7*** , 4 , 6 , ***5*** , 6 , 4

• Μέση Τιμή: $\bar{x} = \dfrac{4+3+5+6+7+4+6+5+6+4}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$

**Β3.** Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

| **Βαθμοί** $x_i$ | **Συχνότητα** $v_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 3-5= -2 | 4 | 4 |
| 4 | 3 | 4-5= -1 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 5-5= 0 | 0 | 0 |
| 6 | 3 | 6-5 = 1 | 1 | 3 |
| 7 | 1 | 7-5 = 2 | 4 | 4 |
| **Σύνολο** | 10 | | | 14 |

(* ο πίνακας μπορεί και να μην γίνει, και να χρησιμοποιήσουμε μόνο τον τύπο)

$$s^2 = \frac{\nu_1(x_1-\bar{x})^2+\dots+\nu_4(x_4-\bar{x})^2}{10} = \frac{(3-5)^2+3(4-5)^2+2(5-5)^2+3(6-5)^2+(7-5)^2}{10} =$$

$$= \frac{4+3\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1+4}{10} = \frac{4+3+3+4}{10} = \frac{14}{10} = 1{,}4$$

**Β4.**

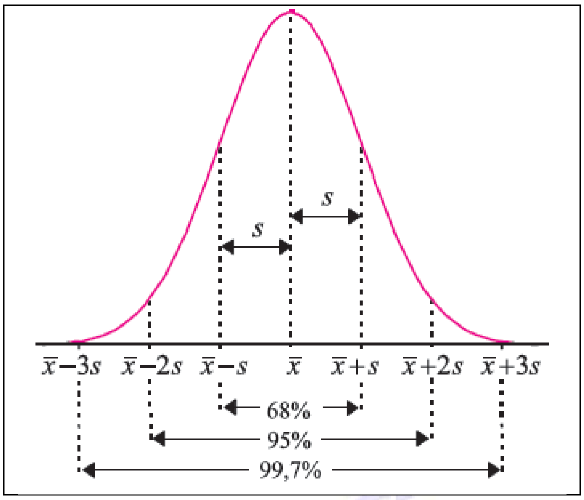
Η τυπική απόκλιση είναι : $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}4} \cong 1{,}18$

Συντελεστής μεταβολής :

$CV = \dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100 = \dfrac{1{,}18}{5}\cdot 100 = 1{,}18\cdot 20 = 23{,}6$ Δηλαδή CV = 23,6 % .

## ΘΕΜΑ Γ

Από την θεωρία , έχουμε ότι για την κανονική κατανομή υπάρχουν τα παρακάτω διαστήματα με τα αντίστοιχα ποσοστά :



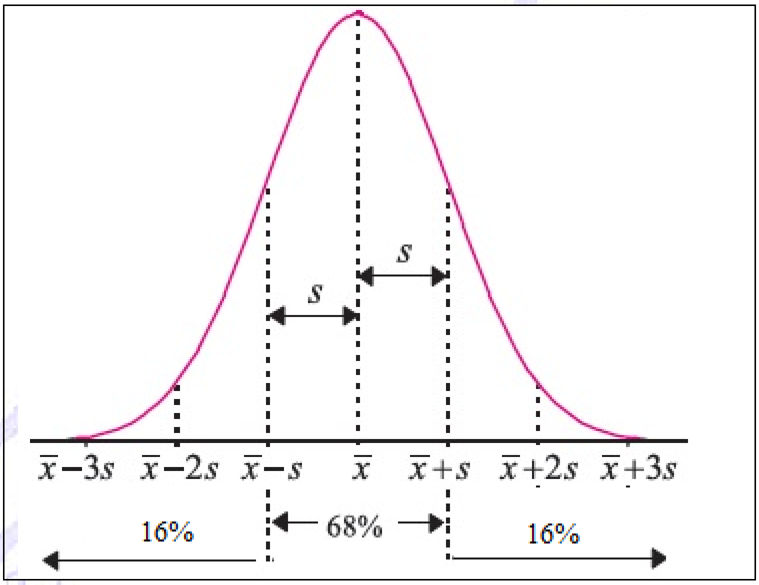

**Γ1.** Αφού το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών , η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x}$ = 40.

**Γ2.** Αφού το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, έχουμε ότι

$\bar{x}$ - s = 35
<=> 40 - s = 35
<=> - s = 35 - 40
<=> -s = - 5
<=> **s = 5**

** Το 16% προκύπτει από την πράξη

$$\frac{100-68}{2} = \frac{32}{2} = 16$$




**Γ3.** Ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών :

$$\frac{100-68}{2} = \frac{32}{2} = 16\ \%$$

Άρα το 16% του 400 είναι:

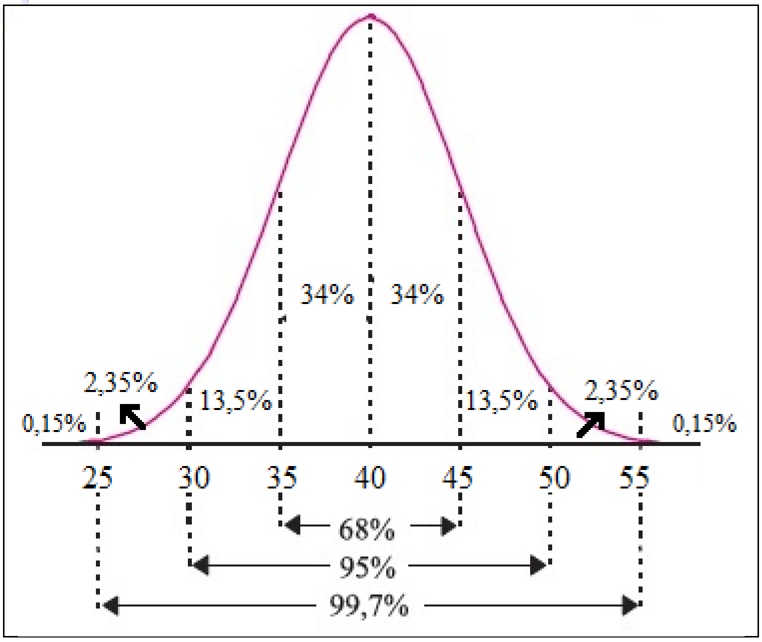
$\frac{16}{100} \cdot 400 = 16 \cdot 4 =$ **64** εργαζόμενοι

---

**Γ4.** Από 30 μέχρι 35 το ποσοστό είναι:

$$\frac{95-68}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5\ \%$$

Άρα από 30 μέχρι 45 το ποσοστό είναι:
13,5 % + 68% = 81,5%




Το 81,5% του 400 είναι: $\frac{81{,}5}{100} \cdot 400 = 81{,}5 \cdot 4 =$ **326** εργαζόμενοι

**<u>ΘΕΜΑ Δ</u>**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

**Δ1.**

• Είναι $f'(x) = (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1)' = -\frac{1}{3}3x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 4x - 3$

• Παίρνω $f'(x) = 0 \iff -x^2 + 4x - 3 = 0 \iff \underline{x^2 - 4x + 3 = 0}$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot3 = 16 - 12 = 4$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2\cdot1} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array}$$

Άρα η παράγωγος μηδενίζεται για $x = 1$ και $x = 3$ .

• Πίνακας προσήμων – μονοτονίας

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | – | 0 | + | 0 | – | |
| f(x) | | ↘ | τ.ε. | ↗ | τ.μ. | ↘ | |

.

** Όταν η f ' είναι της μορφής
$f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
και $\Delta > 0$,
τότε είναι ομόσημη του $\mathbf{\alpha x^2}$
έξω από τις 2 ρίζες, και
ετερόσημη ανάμεσα στις ρίζες !

• <u>Μονοτονία</u>

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ .

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$ .

**Δ2.**

• <u>Ακρότατα</u>

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ , το

$$f(1) = -\frac{1}{3}1^3 + 2\cdot1^2 - 3\cdot1 + 1 = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 = -\frac{1}{3}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 3$ , το

$$f(3) = -\frac{1}{3}3^3 + 2\cdot3^2 - 3\cdot3 + 1 = -3^2 + 18 - 9 + 1 = 1$$

**Δ3.** Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$, πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή 1 .
Οπότε αν το σημείο επαφής είναι $M(x_0 , f(x_0))$ , θα ισχύει $\underline{f'(x_0) = 1}$ .

• Παίρνω :
$f'(x) = 1 \iff -x^2 + 4x - 3 = 1 \iff -x^2 + 4x - 4 = 0 \iff \underline{x^2 - 4x + 4 = 0}$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 16 - 16 = 0$

$x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-(-4)}{2\cdot1} = \dfrac{4}{2} = 2$ Δηλαδή $\underline{\mathbf{x_0 = 2}}$

• <u>Για x = 2</u>, είναι :

$f(2) = -\dfrac{1}{3}2^3 + 2\cdot2^2 - 3\cdot2 + 1 = -\dfrac{8}{3} + 8 - 6 + 1 = -\dfrac{8}{3} + 3 = -\dfrac{8}{3} + \dfrac{3\cdot3}{3} = -\dfrac{8}{3} + \dfrac{9}{3} = \dfrac{1}{3}$

Δηλαδή το ζητούμενο σημείο είναι το $M(2, \dfrac{1}{3})$ .

**Δ4.**
Είναι $f''(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$

Επομένως, αν τα $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5$ έχουν τυπική απόκλιση ίση με $s_x = 3$, για τα $y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5$ , αφού τα $M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5$ είναι πάνω στην ευθεία $y = -2x + 4$ ισχύουν :

$y_1 = -2x_1 + 4$
$y_2 = -2x_2 + 4$
$y_3 = -2x_3 + 4$
$y_4 = -2x_4 + 4$
$y_5 = -2x_5 + 4$

και η τυπική απόκλιση είναι : $s_y = |-2|s_x = 2\cdot3 = 6$ .

Επιμέλεια: ***Άρης Κεσογλίδης***